Orientierungstest – Mathematische Grundlagen

Lösungen:

1. Welche Zahlenmengen gibt es? – Beispiele?

Menge der natürlichen Zahlen N = {1, 2, 3, …}
Menge der ganzen Zahlen Z = {… –2, –1, 0, 1, 2, …}

Menge der rationalen Zahlen Q = Menge aller als Bruch darstellbaren Zahlen

Bruch ist $\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$ mit Nenner $\neq 0$
Brüche lassen sich darstellen als: ganze Zahl oder endliche Dezimalzahl oder unendlich periodische Dezimalzahl.
Z und Q sind abzählbar, d. h. sie haben gleich viele Elemente wie N (Georg Cantor)

Menge der reellen Zahlen R

besteht aus rationalen Zahlen und irrationale Zahlen (nicht als Brüche darstellbar, Beispiele sind nicht ganzahlige Wurzeln (algebraisch) oder transzendente Zahlen wie die Eulersche Zahl e und die Kreiszahl π.

2. Was sind transzendente Zahlen? – Beispiele?

Transzendente Zahlen lassen sich weder als Bruch (sie sind daher irrational) noch als Ergebnis einer algebraischen Gleichung (Polynom = 0 oder Summe von Potenzen = 0) darstellen (sie sind daher nicht als Wurzelterm darstellbar). Berühmte Beispiele sind e und π.

3. Was sind Potenzen?

Potenzen sind Ausdrücke der Form $\text{Basis}^{\text{Exponent}}$

4. Was bedeutet a^{-n}?

Negative Hochzahlen sind Darstellungen von Brüchen $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

5. Was bedeutet $a^{1/n}$?

Gebrochene Hochzahlen sind Darstellungen von Wurzeln $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$

6. Wie rechnet man mit Potenzen (Annahme einer gleiche Basis) ?

Potenzen werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert
Potenzen werden dividiert, indem man die Exponenten subtrahiert
Potenzen werden potenziert, indem man den Exponenten multipliziert
Wurzel aus Potenzen werden gezogen, indem den Exponenten durch den Wurzelexponenten dividiert

7. Wann ist eine Gleichung der unbekannten Größe x linear?

Eine Gleichung der Form $f(x)= ax + b$ heißt linear. Der Funktionsgraph einer linearen Funktion ist eine Gerade mit der Steigung a.

8. Wann ist eine Gleichung der unbekannten Größe x quadratisch und wie löst man sie?

Eine Funktion der Form $f(x)= ax^2 + bx + c$ heißt quadratisch. Die Gleichung $f(x) = 0$ ist eine quadratische Gleichung und wird mit der Formel von Vieta (umgangssprachlich Mitternachtsformel) gelöst:

$$x_{1,2}=\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

9. Wie sieht eine Exponentialfunktion aus?

Allgemein: $f(x) = m\, q^x$. Oft wird die Eulersche Zahl e als Basis gewählt: $f(x) = m\, e^{\lambda x}$, oder mit 10 als Basis : $f(x) = m\, 10^{\lambda x}$ → Wichtig für die Darstellung sehr großer oder sehr kleiner Zahlenwerte z.B. $0{,}000013 = 1.3 \cdot 10^{-5}$ oder $550000000 = 5.5 \cdot 10^8$

10. Was ist eine Logarithmusfunktion?

Logarithmusfunktionen sind die Umkehrfunktionen von Exponentialfunktionen. Sie machen Exponentialfunktionen rückgängig. Es gibt so viele Logarithmusfunktionen wie es Basen gibt. Wichtige Basen sind: 10 (lg oder log = 10er-Logarithmus) und e (ln = natürlicher Logarithmus)

11. Wie löst man eine Exponentialgleichung?

I.A. durch Anwenden einer bekannten Logarithmusfunktion (ln bzw. log) und Anwenden der Rechenregeln:

$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$

$\ln(a^b) = \ln(a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a \cdot a \cdot) = \ln a + \ln a + \ln a + \ldots + \ln a + \ln a = b \cdot \ln a$

12. Was ist eine Umkehrfunktion?

Eine Umkehrfunktion macht die Originalfunktion rückgängig: $f^{-1}(f(x)) = x$

Wurzeln sind die Umkehrfunktionen von Potenzfunktionen

Logarithmen sind die Umkehrfunktionen von Exponentialfunktionen

Trigonometrische Funktionen (sin, cos, tan) haben die Arcusfunktion als Umkehrfunktion ($\sin^{-1}$, usw.)

13. Was ist eine Nullstelle?

Eine Nullstelle ist das Argument x einer Funktion mit $f(x) = 0$. Der Funktionswert ist also 0. Geometrisch der Schnittpunkt des Funktionsgraphen mit der Abszisse (x-Achse)

14. Was ist ein Extremwert? Welche gibt es?

Wenn sich in einer beliebig kleinen Umgebung eines Punktes eines Funktionsgraphen einer stetigen Funktion f(x) keine Punkte mit einem noch kleinerem Funktionswert (Minimum) oder einem noch größerem Funktionswert (Maximum) finden lassen, dann heißt dieser lokaler oder relativer Extremwert. Existiert an der Stelle x_0 ein lokaler Extremwert, dann hat die 1. Ableitung von f(x) an der Stelle x_0 den Wert 0. (die Umkehrung gilt nicht)

Es gibt Minima und Maxima.

15. Was ist ein Wendepunkt? Wie kann man ihn berechnen?

Ein Wendepunkt ist ein Punkt des Funktionsgraphen einer stetigen Funktion, in dem sich der Krümmungssinn der Kurve ändert (von Link- auf Rechtskurve bzw. umgekehrt) Im Wendepunkt ist die 2. Ableitung der Funktion gleich Null. Der Wendpunkt ist auch der Punkt an dem die Funktion eine extremer Steigung besitzt.

16. Wann ist eine Funktion stetig?

Funktionsgraphen einer stetigen Funktion sind ohne Absetzen oder Aufheben des Stifts zeichenbar. Eine Funktion ist also stetig, wenn durch eine beliebig kleine Änderung der Argumente auch die Änderung der Funktionswerte beliebig klein gemacht werden kann.

17. Beispiele für Unstetigkeitsstellen?

Pole sind Unstetigkeitsstellen, an denen der Funktionswert bei Annäherung divergiert, also gegen Unendlich strebt. Tritt auf bei Funktionsgleichungen mit der Variable im Nenner. Polstellen sind Stellen, an denen der Nenner den Wert 0 annehmen würde. Sprungstellen sind Stellen, an der Funktionswert einen Sprung macht. Tritt auf bei stückweise definierten (zusammengesetzten) Funktionen.

18. Was ist ein Pol?

Würde der Nenner einer gebrochen-rationalen Funktion den Wert 0 annehmen, dann tritt an dieser Stelle ein Pol auf. Die Funktion divergiert an dieser Stelle. Es gibt keinen Funktionswert, man kann nur das Verhalten bei Näherung an den Pol (von links, bzw. von rechts) feststellen.

19. Was ist eine Asymptote?

Eine Asymptote ist ein Funktionsgraph einer Funktion a(x), für den die Differenz f(x) – a(x) gegen 0 strebt, wenn x gegen plus oder minus Unendlich strebt. Geometrisch bedeutet das, dass sich Funktion und Asymptote immer mehr nähern. Für sehr große oder sehr kleine Argumente kann man dann gleich mit der Asymptote rechnen ohne große Fehler zu machen. Ist a(x) linear, dann ist der Funktionsgraph von a(x) eine Tangente an einem Fernpunkt.

20. Wie ist der Differenzenquotient definiert? Welche geometrische Interpretation gibt es dafür?

der Differenzenquotient ist $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

und er entspricht der Steigung der Sehne oder Sekante (Gerade zwischen zwei Punkten einer Kurve)

21. Wie ist der Differentialquotient definiert? Welche geometrische Interpretation gibt es dafür?

der Differentialquotient ist $\lim\limits_{\Delta x \to \infty} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to \infty} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, also der Grenzwert des Differenzenquotienten für Δx gegen 0. Er entspricht der Steigung der Tangente an f(x) an der Stelle x.

22. Was ist die Bedeutung der 1. Ableitung?

die 1. Ableitung ist eine Funktion, die jedem x – Wert den Wert des Differentialquotienten zuordnet. Der Wert der 1. Ableitung an der Stelle x entspricht also der Steigung der Tangente an f(x) an der Stelle x. Sie gibt also Änderungsraten der Funktion f(x) an.

23. Was ist die Bedeutung der 2. Ableitung?

die 2. Ableitung ist die Ableitung der 1. Ableitung. Sie gibt die Änderung der Steigung an und gibt in an, wie stark die Krümmung des Funktionsgraphen ist.

24. Wie differenziert man Funktionen die aus Summen bestehen?

Ableitung von Summen = Summe von Ableitungen

25. Wie differenziert man Funktionen, die aus Produkten von Funktionen u(x), v(x) bestehen?

Produktregel. $(u\,v)' = u\,v' + u'\,v$

26. Wie differenziert man Funktionen, die aus Bruchterme von Funktionen n(x), z(x) bestehen?

Quotientenregel: $\frac{z}{n} = \frac{z\,n' - z'\,n}{n^2}$

27. Wie differenziert man verkettete Funktionen?

Kettenregel: Man differenziert die äußere Funktion und multipliziert dann mit der Ableitung der inneren Funktion (innere Ableitung)

28. Ableitung von Konstanten?

Die Ableitung einer Konstanten = 0

29. Ableitung von linearen Termen?

$\frac{d(ax + b)}{dx} = a$

30. Wie differenziert man Potenzen?

$\frac{d\,(x^n)}{dx} = n\,x^{n-1}$ also Hochzahl kommt als Faktor nach vorne, der Exponent um 1 reduzieren.

31. Wie differenziert man Exponentialterme?

$\frac{d\,(q^x)}{dx} = q^x \cdot \ln q$ und speziell gibt es eine Basis (Eulersche Zahl e) mit $\frac{d(e^x)}{dx} = e^x$.

e^x ist die einzige Funktion, die identisch mit ihrer Ableitung ist.

32. Wie differenziert man trigonometrische Funktionen?

$(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$ $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

33. Was ist das unbestimmte Integral?

Integrieren ist die Umkehrung des Differenzierens. Die Menge aller Funktion F(x), deren Ableitung die Funktion f(x) ergibt, heißt unbestimmtes Integral: F(x)= $\int f(x)$

34. Was ist das bestimmte Integral?

Das bestimmte Integral ist die Differenz zweier Funktionswerte einer bestimmten Stammfunktion F(x) (eines unbestimmten Integrals). Es ist also eine Zahl. Diese kann als Betrag der Fläche unter der Kurve der Funktion f(x) interpretiert werden.:

$$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$$

35. Wie integriert man eine Konstante?

Das Integral über die Konstante k ist kx + C

36. Wie integriert man eine Summe?

Das Integral über eine Summe ist gleich der Summe der Integrale der Summanden.

37. Wie integriert man Potenzfunktionen?

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \text{ für } n \neq -1 \quad \text{speziell} \int x^{-1} \, dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

also: Exponent um 1 erhöhen, durch die neue Hochzahl dividieren (außer bei $\frac{1}{x}$)

38. Was ist ein Vektor?

Ein Vektor $\vec{a}$ ist durch Zahlenpaare (in der Ebene) bzw. -tripel (im Raum) dargestellt. Die Vektorelemente (Vektorkomponenten) werden oft untereinander (als „Spaltenvektoren“) oder hintereinander (als „Zeilenvektor“) geschrieben. Ein Vektor besitzt eine Richtung und einen Betrag (Länge).

Beispiele:

2-dimenesionaler Zeilenvektor: $\vec{a} = (a_1, a_2)$; →Ebenenvektor

3-dimensionaler Spaltenvektor: $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ →Raumvektor

39. Wie werden Vektorern addiert?

Durch die Addition zweier Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ entsteht ein neuer Vektor $\vec{c}$ (Summenvektor)

Die Addition $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ erfolgt elementweise

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

40. Wie berechnet man den Betrag (Länge) eines Vektors $\vec{a}$?

Der Betrag eines Vektors berechnet sich aus der Quadratwurzel über die Summe der Quadrate der einzelnen Vektorelemente.

Für einen 3-dimensionalen Raumvektor erhält man:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

41. Wie wird ein Vektor mit einem Skalar multipliziert?

Bei der Multiplikation eines Vektors $\vec{a}$ mit einem Skalar λ wird jedes Element des Ausgangsvektors mit diesem multipliziert. Das Ergebnis ist ein um das λ-fache längerer Vektor in Richtung des Ausgangsvektors $\vec{a}$:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \lambda \cdot a_3 \end{pmatrix}$$

42. Wie ist das Skalarprodukt definiert?

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ ist definiert als das Produkt der Beträge der beiden Vektoren multipliziert mit dem Cosinus des Winkels θ, den die Vektoren miteinander einschließen.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\theta)$$

Das Ergebnis ist ein Skalar, d.h. eine Zahl. Zur Berechnung des Skalarproduktes werden die jeweiligen Vektorelemente miteinander multipliziert. In 3 Raumdimensionen gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$